

Matalýza číslo jedna

Z velké části jenom opsaná tabule. Občas tam přidám nějaký svůj komentář / random volání o pomoc...

Contents

Matalýza číslo jedna	1
Definice: Spočetná množina	3
Definice: Metrika	3
Posloupnosti a jejich limity	4
Definice: Posloupnost prvků množiny	4
Definice: Vlastní limita posloupnosti	4
Definice: Nevlastní limita posloupnosti	4
Definice: Rozšířená reálná čísla $\mathbb{R}^*$	4
Věta: O aritmetice limit	5
Věta: O limitě a uspořádání	5
Věta: O dvou policajtech	6
Definice: Podposloupnost	6
Definice: Hromadný bod	7
Věta: O monotónní podposloupnosti	7
Definice: Řada	8
Funkce	8
Definice: Exponenciální funkce	8
Definice: Inverzní funkce	8
Definice: Eulerovo číslo	8
Definice: Přirozený logaritmus	8
Definice: Mocnění	9
Definice: Goniometrické funkce	9
Definice: Prstencové okolí	9
Definice: Limita funkce	9
Definice: Jednostranná limita funkce	9
Věta: O aritmetice limit	10
Věta: O dvou policajtech pro funkce	10
Věta: O limitě složené funkce (VOLSf)	10
Spojitosť funkcí	11
Definice: Spojitosť	11
Definice: Spojitosť na intervalu	11
Definice: Bolzanova	11
Definice: Maxima a minima funkce	11
Definice: Kompaktní netriviální interval	12
Věta: Princip maximality	12
Derivace	13
Definice: Derivace funkce	13
Definice: Diferencovatelnost	13
Tvzení: Aritmetika derivací	13
Věta: Derivace složené funkce	14
Věta: Limita inverzní funkce	14
Věta: L'Hospitalovo pravidlo	15
Věta: nutná podmínka pro existenci extrému	16

Věta: Rolle	16
Věta: Lagrangeova věta o střední hodnotě	16
Věta: O derivaci a monotonii	17
Definice: Konvexnost	17
Definice: n-tá derivace	17
Definice: Taylorův polynom	18
Definice: Taylorova řada	18
Primitivní funkce	18
Věta: O substituci	19
Věta: Integrace per partes	19
Určitý integrál	19
Definice: Newtonův integrál	19
Definice: Dělení intervalu	20
Definice: Dolní Reimannova suma	20
Definice: Horní Reimannova suma	20
Definice: Horní/dolní Reimannův integrál	21
Definice: Riemannův integrál	21
Aplikace integrálů	21
Věta: Odhad integrálu monotónní funkce	21
Věta: Integrální kritérium konvergence řad	21
Definice: Křivka	22
Definice: Délka hladké křivky	22
Vlastnosti Riemannova a Newtonova integrálu	22

DEF

Nechť A, B jsou množiny.

A má stejnou mohutnost jako B (značíme $|A| = |B|$), pokud existuje bijekce mezi A a B .

Mohutnost A je nejvýš tak velká, jako mohutnost B , pokud existuje prostá funkce z A do B .

Značíme $|A| \leq |B|$.

Takovej faktík: $|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$

DEF Spočetná množina

Množina A je *spočetná*, pokud $|A| \leq |\mathbb{N}|$, jinak je *nespočetná*.

Reálná čísla reprezentujeme nekonečným desetinným rozvojem $n, d_1 d_2 d_3 \dots$. Dva různé zápisy mohou reprezentovat stejné číslo:

$$2,3599999\dots = 2,3600000\dots$$

TVRZ

Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

DKZ

Nechť je $\mathbb{R}$ spočetná, nechť f je prostá funkce $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$. Nechť $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována takto: pro $n \in \mathbb{N}$, pokud $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = n$, tak $g(n) = x$.

Všimněme si, že g je surjekce (na $\mathbb{R}$), tj. $\{g(1), g(2), g(3), \dots\} = \mathbb{R}$

DEF

Nechť $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. $x \in \mathbb{R}$ je **horní mez** (horní závora) množiny A , pokud $\forall y \in A : y \leq x$.
2. $x \in \mathbb{R}$ je **dolní mez** (dolní závora) množiny A , pokud $\forall y \in A : y \geq x$.
3. $x \in \mathbb{R}$ je **maximum** (největší prvek) A , pokud x je horní mez A a zároveň $x \in A$ ($\max A$)
4. $x \in \mathbb{R}$ je **minimum** (nejmenší prvek) A , pokud x je dolní mez A a zároveň $x \in A$ ($\min A$)
5. A je **shora omezená**, pokud má horní mez.
6. A je **zdola omezená**, pokud má dolní mez.
7. A je **omezená**, pokud je omezená zdola i shora.
8. $x \in \mathbb{R}$ je **supremum** A , pokud x je nejmenší horní mez A . ($\sup A$)
9. $x \in \mathbb{R}$ je **infimum** A , pokud x je největší dolní mez A . ($\inf A$)

Pokud A není shora omezená, pak: $\sup A = +\infty$.

Pokud A není zdola omezená, pak: $\inf A = -\infty$.

Pro $\emptyset$: $\inf \emptyset = -\infty$, $\sup \emptyset = +\infty$.

DEF Metrika

M množina. Funkce $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ je *metrika* na M , pokud

1. $\forall x, y \in M : d(x, y) \geq 0$, navíc $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in M : d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in M : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Potom (M, d) je metrický prostor.

Fakt: Funkce $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná $d(x, y) := |x - y|$ je metrika na $\mathbb{R}$.

Posloupnosti a jejich limity

DEF Posloupnost prvků množiny

Posloupnost prvků množiny M je funkce $a : \mathbb{N} \rightarrow M$. Místo $a(n)$ píšeme a_n , celá posloupnost se píše $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$.

DEF

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ je

1. **shora omezená (resp. zdola, omezená)**, pokud je množina $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ shora omezená (resp. zdola omezená, omezená).
2. **rostoucí**, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$
3. **klesající**, pokud $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$
4. **slabě rostoucí (neklesající), slabě klesající (nerostoucí)...** $\leq, \geq$

Pokud je *slabě rostoucí/klesající*, pak je **monotónní**

DEF Vlastní limita posloupnosti

$(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ má *vlastní limitu* $L \in \mathbb{R}$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

Neboli: pro sebemenší interval okolo L musí od nějakého bodu posloupnost být v tomto intervalu.

Zapisuji $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, nebo $(a_n) \rightarrow L$.

Říkáme “ (a_n) je konvergentní”, nebo “ (a_n) konverguje (k L)”

DEF Nevlastní limita posloupnosti

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$ má nevlastní limitu $+\infty$, pokud

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N} : a_n \geq K$$

Neboli: pro každé K musí být posloupnost od nějakého bodu větší než K .

Takový faktíček: (a_n) má limitu $+\infty \Rightarrow (a_n)$ není shora omezená. **Bacha, není to ekvivalence.**

Třeba 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, ...

DEF Rozšířená reálná čísla $\mathbb{R}^*$

$\mathbb{R}^*$ je množina $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, kde

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$$

A vole další obivous věci žeo.

Naopak tohle všechno **není definované**:

1. $(+\infty) + (-\infty)$ a naopak
2. $0 \cdot (\pm\infty)$ a naopak
3. $(+\infty) - (+\infty)$ a se zápornými taky ne
4. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{x}{0}$ jsou “neurčité výrazy”

DEF

Pro $A \in \mathbb{R}, \varepsilon(0, +\infty)$, okolí A o poloměru ε , značené $\mathcal{U}(A, \varepsilon)$, je $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Pro $\varepsilon \in (0, +\infty)$, okolí $+\infty$ o poloměru ε , značené $\mathcal{U}(+\infty, \varepsilon)$, je $(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$.

Pro $\varepsilon \in (0, +\infty)$, okolí $-\infty$ o poloměru ε , značené $\mathcal{U}(-\infty, \varepsilon)$, je $(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}) \subseteq \mathbb{R}$.

POZN: Pro $L \in \mathbb{R}^*$ a $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, platí, že (a_n) má limitu $L \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, +\infty) \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$

Jinak zapsaná definice limity nahoře.

TVRZ

Každá posloupnost reálných čísel má nejvýše jednu limitu.

DKZ

Sporem nechť $(a_n) \in \mathbb{R}$ má dvě různé limity $L_1, L_2 \in \mathbb{R}, L_1 \neq L_2$.

$\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}(L_1, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(L_2, \varepsilon) = \emptyset$.

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_1$, tak $\exists n_0 \forall n > n_0 : a_n \in \mathcal{U}(L_1, \varepsilon)$.

Protože $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L_2$, tak $\exists n'_0 \forall n > n'_0 : a_n \in \mathcal{U}(L_2, \varepsilon)$.

Pro $n := \max\{n_0, n'_0\} : a_n \in \mathcal{U}(L_1, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(L_2, \varepsilon)$.

To je spor, že je průnik prázdná množina...

VĚTA

Každá monotónní posloupnost $(a_n) \in \mathbb{R}$ má limitu

DKZ

Buď (a_n) slabě rostoucí (pro sl. klesající je důkaz analogický).

Označme $L := \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Tvrdím, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Pro spor, ať neplatí, že $\lim a_n = L$. Tedy $\exists \varepsilon \in (0, +\infty) \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0 : a_n \notin \mathcal{U}(L, \varepsilon)$.

Já vím, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq L$ (L je supremum).

Pokud $L \in \mathbb{R}$, tak pokud aspoň jedno a_n patří do $(L - \varepsilon, L)$, tak mám spor.

VĚTA O aritmetice limit

Buď $K, L \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = K$:

1. pokud je $K + L$ definováno, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = K + L$
2. pokud je $K \cdot L$ definováno, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = K \cdot L$
3. pokud je $\frac{K}{L}$ definováno a $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$, tak $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{K}{L}$

(bez dk lež's gooooo)

VĚTA O limitě a uspořádání

Nechť $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ má limitu A a $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ má limitu B , kde $A, B \in \mathbb{R}^*$.

Potom:

1. pokud $A < B$, tak $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : a_m < b_n$
2. pokud pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí, že $a_n \leq b_n$, tak $A \leq B$

DKZ

1. Předpokládáme $A < B$. Potom $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}(A, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(B, \varepsilon) = \emptyset$.

Jelikož $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, tak $\exists n_0^A \in \mathbb{N} : \forall n > n_0^A : a_n \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$.

Obdobně $\exists n_0^B \in \mathbb{N} : \forall n > n_0^B : a_n \in \mathcal{U}(B, \varepsilon)$.

Ted si vezmu $\max n_0 := \max\{n_0^A, n_0^B\}$ a pro každé $m, n \geq n_0$ teda máme $a_m \in \mathcal{U}(A, \varepsilon)$ a $b_n \in \mathcal{U}(B, \varepsilon)$. Takže $a_m < b_n$. Protože $A < B$ a protože okolí nemají žádný společný prvek.

2. Předpokládáme pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$.

Pro spor $A > B$.

Podle 1. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m, n \geq n_0 : a_m > b_n$, ale to je ve sporu s tím, že pro nekonečně $n \in \mathbb{N}$ máme $a_n \leq b_n$. ■

POZN: Pokud pro $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $B = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, tak z toho *neplyne*, že $A < B$ (ale plyne z toho $A \leq B$)

např $a_n = -\frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$. Limity jsou obě 0.

VĚTA O dvou policajtech

Nechť (a_n) , (b_n) , (c_n) jsou posloup. takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_n \leq c_n$. Nechť (a_n) i (c_n) mají obě stejnou limitu $L \in \mathbb{R}^*$.

Potom i (b_n) má limitu L .

DKZ

Libovolné $\varepsilon > 0$. Volí to největší tvůj opp.

Chceme najít $n_0 \in \mathbb{N}$, že $\forall n \geq n_0 : b_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$.

Víme, že $\exists n_0^A : \forall n \geq n_0^A : a_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$. Stejně pro (c_n) a n_0^C .

$$n_0 := \max\{n_0^A, n_0^C\}$$

$\forall n \geq n_0$, pak platí $a_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon) \wedge c_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$ a navíc $a_n \leq b_n \leq c_n$, tedy $b_n \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$

■

POZN: Stačí, pokud budeme předpokládat, že $a_n \leq b_n \leq c_n$ platí od nějakého bodu n_1 .

POZN: Pokud $L = +\infty$, nemusíme ani brát v potaz c_n , pro $L = -\infty$ naopak a_n

Příklad pro fyzly: mějme $b_n = \frac{3n + \sin\left(\sqrt{n} + \frac{2}{10+n}\pi\right)}{2n + \cos(\ln(n))}$.

$$\frac{3n-1}{2n+1} \leq b_n \leq \frac{3n+1}{2n-1}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \dots \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{3}{2}$$

DEF Podposloupnost

Posloupnost $(b_n) \subseteq \mathbb{R}$ je **podposloupnost** $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, pokud existuje *rostoucí* funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že $b_n = a_{f(n)}$.

V podstatě si z té posloupnosti můžu nějaký prvky vybrat, ale ne je nijak přehazovat.

DEF Hromadný bod

$L \in \mathbb{R}^*$ je hromadný bod $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$, pokud (a_n) má podposloupnost (b_n) takovou, že $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$.

Označme $\mathcal{H}((a_n))$ množinu hromadných bodů (a_n) .

Pokud má (a_n) limitu L , tak $\mathcal{H}((a_n)) = \{L\}$. Každá její podposloupnost má taky tu limitu.

$$\mathcal{H}((-1)^n) = \{\pm 1\}$$

VĚTA O monotónní podposloupnosti

Každá podposloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ má monotónní podposloupnost.

DKZ

a_n je *nízký*, když každý další člen je ostře větší.

1. (a_n) má nekonečně mnoho nízkých členů.

Potom nechť (b_n) je podposloupnost tvořená nízkými členy (a_n) .

Jsem hotov. Jistě (b_n) je rostoucí.

2. (a_n) má jen konečně mnoho nízkých členů.

$\exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n$ není nízký.

Slovně: Od n_0 nebude žádný a_n , že by nebyl nějaký další člen menší (to by znamenalo, že a_n je nízký, ale ty nám došly), takže z tědleh členů tu podposloupnost vytvořím. Ta bude nerostoucí.

Induktivně definujeme nerostoucí podposloupnost (b_n) .

$$b_1 = a_{n_0}$$

Nechť už máme $b_1, \dots, b_k$ pro $k \in \mathbb{N}$, kde

$$b_j = a_{f(j)} \text{ s } f(1) < f(2) < \dots < f(k) \text{ a } b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k.$$

$b_k = a_{f(k)}$ není nízký, tedy $\exists n > f(k)$, že $a_n < a_{f(k)}$. Označme $f(k+1)$ nejmenší n s touto vlastností. $b_{k+1} = a_{f(k+1)}$

Důsledek 1: Každá posloupnost má aspoň 1 hromadný bod.

Důsledek 2: Každá omezené posloupnost má konvergentní podposloupnost. (Bolzano-Weierstrass)

VĚTA

Pro každou posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ platí, že $\mathcal{H}((a_n))$ má největší i nejmenší prvek.

DEF

Největší hromadný bod $(a_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathbb{R}$ se nazývá *limes superior*, značí se $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$,

Nejmenší hromadný bod (a_n) je *limes inferior* (a_n) a značí se $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$.

DEF Řada

Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$, **řada** (se sčítanci (a_n)) je výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \left(\text{nebo } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$$

n -tý částečný součet té řady je $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Pokud má $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ limitu $L \in \mathbb{R}^*$, tak řekneme, že L je **součet** řady $a_1 + a_2 + \dots$. Pokud navíc $L \in \mathbb{R}$, tak řekneme, že ta řada je **konvergentní**.

Funkce

$f : A \rightarrow B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$

A ... definiční obor f

$\text{Im}(f) := \{f(x); x \in A\} \subseteq \mathbb{B}$

f je **prostá** na $M \subseteq A : \forall x_1, x_2 \in M : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f je **shora omezená** na $M \subseteq A : \exists K \in \mathbb{R} : \forall x \in M : f(x) \leq K$, analogicky sdola, omezená.

f je **rostoucí** na $M \subseteq A : \forall x_1, x_2 \in M : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, analogicky neklesající atd atd

f je **periodická** s periodou $P : \forall x \in A : x + P \in A \wedge f(x) = f(x + P)$

DEF Exponenciální funkce

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

Takovej vtípek (faktíček), nebo tzv. fax:

1. Řada, kterou jsme použili konvertuje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

2. $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} : \exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$.

3. $\exp(0) = 1$

4. $\forall x > 0 : \exp(x) > 1, \forall x < 0 : \exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} < 1$

5. $\exp(x)$ je rostoucí na $\mathbb{R}$:

pro $x_1 < x_2$ mám $\exp(x_2) = \exp(x_1 + (x_2 - x_1)) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2 - x_1) > \exp(x_1)$

DEF Inverzní funkce

Nechť $f : A \rightarrow B$ je prostá. Funkce $g : \text{Im}(f) \rightarrow A$ je **inverzní** funkce k f , pokud $\forall x \in A \forall y \in \text{Im}(f) : y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$.

DEF Eulerovo číslo

Hodnota

$$\exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \approx 2,718$$

je Eulerovo číslo.

Faktíček hihi: $\text{Im}(\exp(x)) = (0, +\infty)$

DEF Přirozený logaritmus

Inverzní funkce k $\exp(x)$ se nazývá přirozený logaritmus, značí se $\ln : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Pozorováníčko: $\forall x_1, x_2 > 0 : \ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$

DEF Mocnění

$$\forall x > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} : x^y := \exp(y \cdot \ln(x))$$

Pozorováníčko: $x^n = \exp(n \cdot \ln(x)) = \exp(\ln(x) + \ln(x) + \ln(x) + \dots + \ln(x)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(x)) \cdot \dots \cdot \exp(\ln(x)) = x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x$

A ještě jedno: $e^x = \exp(x \cdot \ln(e)) = \exp(x)$

DEF Goniometrické funkce

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

DEF Prstencové okolí

$A \in \mathbb{R}$. Prstencové okolí $\mathcal{P}(A, \varepsilon) = \mathcal{U}(A, \varepsilon) \setminus \{A\} = (A - \varepsilon, A) \cap (A, A + \varepsilon)$.

Levé ($\mathcal{P}^-(A, \varepsilon)$) a pravé ($\mathcal{P}^+(A, \varepsilon)$) prstencové okolí jsou jenom půlky.

Pro nekonečna to je prostě $\mathcal{U}(A, \varepsilon)$, neodstraňuju nekonečno.

DEF Limita funkce

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $A, L \in \mathbb{R}^*$.

f má v A limitu L , značím $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{P}(A, \delta) : x \in M \wedge f(x) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

Mno, neboli. Pro jakkoliv malé okolí kolem L (což je hodnota té funkce) dokážu najít prstencové okolí A , že každý prvek v něm spadá do toho, který jsem dostal zadaný.

Jinak zapsáno:

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(\mathcal{P}(A, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

DEF Jednostranná limita funkce

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}^*$.

f má limitu zleva rovnou L , značím $\lim_{x \rightarrow A^-} f(x) = L$, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^-(A, \delta) : x \in M \wedge f(x) \in \mathcal{U}(L, \varepsilon)$$

Analogicky zprava, značím $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = L$. Pravé prstencové okolí.

Faktíček od hajného:

“Heineho definice limity”

$f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $A, L \in \mathbb{R}^*$, nechť M obsahuje nějaké prstencové okolí A . Potom následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$
2. Pro každou posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M \setminus \{A\}$ platí, že pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$.

Věta o aritmetice limit pro funkce:

VĚTA O aritmetice limit

Buď $A, K, L \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n \rightarrow A} f(x) = L$ a $\lim_{n \rightarrow A} g(x) = K$:

1. pokud je $K + L$ definováno, tak $\lim_{n \rightarrow A} (f(x) + g(x)) = L + K$
2. pokud je $K \cdot L$ definováno, tak $\lim_{n \rightarrow A} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot K$
3. pokud je $\frac{K}{L}$ definováno, tak $\lim_{n \rightarrow A} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{L}{K}$

(bez dk lez's goooooo)

VĚTA

Nechť $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L_f$ a $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = L_g$, potom

1. pokud $L_f > L_g$, tak $\exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}(A, \delta) : f(x) > g(x)$
2. pokud $\forall \delta > 0 \exists x \in \mathcal{P}(A, \delta) : f(x) \geq g(x)$, tak $L_f \geq L_g$

VĚTA O dvou policajtech pro funkce

Nechť f, g, h jsou funkce, nechť $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = L$ a $\lim_{x \rightarrow A} h(x) = L$ pro $A, L \in \mathbb{R}^*$.

Nechť $\exists \delta > 0 \forall x \in \mathcal{P}(A, \delta) : f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, potom $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = L$.

| **POZN:** Funguje i pro jednostranné limity

VĚTA

Pokud je f monotónní na (A, B) , tak existuje $\lim_{x \rightarrow B^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x)$.

Pokud je f monotónní na $(A, +\infty)$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

Pokud je f monotónní na $(-\infty, A)$, tak existuje $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

VĚTA O limitě složené funkce (VOLSF)

Nechť $A, B, L \in \mathbb{R}^*$, nechť f a g jsou funkce, že $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, $\lim_{x \rightarrow B} g(x) = L$.

Nechť platí aspoň jeden z předpokladů:

1. $g(B) = L$ (tedy $B, L \in \mathbb{R}$)
2. $\exists \delta_2 > 0$, že $\forall x \in \mathcal{P}(A, \delta_2) : f(x) \neq B$

Potom $\lim_{x \rightarrow A} g(f(x)) = L$

DKZ

Mějme $\varepsilon > 0$.

Víme, že $\lim_{x \rightarrow B} g(x) = L$, tedy $\exists \gamma > 0 : g(\mathcal{P}(B, \gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon)$.

Víme, že $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$, tedy $\exists \delta > 0 : f(\mathcal{P}(A, \delta)) \subseteq \mathcal{U}(B, \gamma)$.

f ale může zobrazit něco z $\mathcal{P}(A, \delta)$ na B , takže bychom funkce pak nemohli složit. Musí tedy platit alespoň jeden z předpokladů.

Pokud platí 1. předpoklad, tak $g(\mathcal{U}(B, \gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon)$. Potom $g(f(\mathcal{P}(A, \delta))) \subseteq g(\mathcal{U}(B, \gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon)$.

Pokud platí 2. předpoklad, tak pro $\delta' := \min\{\delta, \delta_2\} : f(\mathcal{P}(A, \delta)) \subseteq \mathcal{P}(B, \gamma)$. Potom $g(f(\mathcal{P}(A, \delta'))) \subseteq g(\mathcal{P}(B, \gamma)) \subseteq \mathcal{U}(L, \varepsilon)$.

Tedy $\lim_{x \rightarrow A} g(f(x)) = L$. ■

Spojitosť funkcí

DEF Spojitosť

Funkce f je **spojitá** v $A \in \mathbb{R}$, pokud platí, že $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A)$.

Funkce f je **spojitá** v $A \in \mathbb{R}$ **zleva**, pokud platí, že $\lim_{x \rightarrow A^-} f(x) = f(A)$.

Funkce f je **spojitá** v $A \in \mathbb{R}$ **zprava**, pokud platí, že $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = f(A)$.

DEF Spojitosť na intervalu

f je spojitá na intervalu I , pokud

1. je spojitá v každém vnitřním bodě I ,
2. má-li I levý krajní bod, je v něm spojitá zprava,
3. má-li I pravý krajní bod, je v něm spojitá zleva.

DEF Bolzanova

Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$, nechť f je spojitá na $I = [A, B]$. Pokud $f(A) < 0 < f(B)$ nebo $f(A) > 0 > f(B)$, tak $\exists c \in (A, B) : f(c) = 0$.

DKZ

Předp. $f(A) < 0 < f(B)$.

Označme $Z = \{x \in [A, B] : f(x) < 0\}$, $S := \sup Z \in [A, B]$.

Tvrdíme $f(S) = 0$.

Sporem, nechť $f(S) \neq 0$.

Pokud $f(S) < 0$, pak ze spojitosti plyne, že $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{U}(S, \delta) : f(x) < 0$

Věta o nabývání mezihodnot je zobecnění Bolzanovy pro jakékoliv m , ne jenom 0. Důkaz je jenom to, že funkci posuneme.

VĚTA

f spojitá na intervalu I .

Potom $f(I)$ je interval.

DKZ

Volme $x < y < z$, že $x, z \in f(I)$. Volme $A, B \in I$, že $f(A) = x$, $f(B) = z$. Z věty o nabývání mezihodnot $\exists c \in (A, B) : f(c) = y$, tedy $y \in f(I)$.

DEF Maxima a minima funkce

Nechť $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, pro $M \subseteq \mathbb{R}$. Nechť $A \in M$. Řeknu, že f nabývá v A

1. (globální) maximum, pokud $\forall x \in M : f(x) \leq f(A)$
2. ostré (globální) maximum, pokud $\forall x \in M \setminus \{A\} : f(x) < f(A)$
3. lokální maximum, pokud $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{U}(A, \varepsilon) \cap M : f(x) \leq f(A)$
4. ostré lokální maximum, pokud $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{P}(A, \varepsilon) \cap M : f(x) < f(A)$

Analogicky pro minima.

V každém případě to je fakt *extrém*.

DEF Kompaktní netriviální interval

Netriv. interval I je kompaktní, pokud obsahuje levý i pravý krajní bod.

$$I = [A, B] \quad A, B \in \mathbb{R}, A < B$$

VĚTA Princip maximality

$I = [A, B]$ netriviální kompaktní, f spojitá na I .

f nabývá na I globálního maxima i minima.

DKZ

Pro maximum:

$$S := \sup f(I) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Najdeme $C \in I$, že $f(C) = S$, tedy v C je glob. maximum.

Z def. suprema: $\forall \varepsilon > 0 \exists x \in I : f(x) \in \mathcal{U}(S, \varepsilon)$

Pro $n \in \mathbb{N}$ zvolme $x_n \in I$, že $f(x_n) \in \mathcal{U}(S, \frac{1}{n})$.

Jistě $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = S$.

Bolzano-Weierstrass: posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená (protože $(x_n) \subseteq I$ a I je kompaktní $\Rightarrow$ omezená), tedy má konvergentní podposloupnost $(z_n)_{n=1}^{\infty}$. Označme si $L := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$.

Jistě $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = S$, protože $(f(z_n))_{n=1}^{\infty}$ je podposloupnost $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$.

Jistě $L \in I$, protože I je kompaktní.

Dokážeme, že $f(L) = S$, tedy v L se nabývá maximum.

Pro spor, nechť $f(L) \neq S$.

Pokud $f(L) > S$ spor s $S = \sup f(I)$.

Nechť $f(L) < S$, označme $R := f(L)$, volme $\varepsilon > 0$, že $\mathcal{U}(S, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(R, \varepsilon) = \emptyset$.

Víme, že f je spoj. v L (případně jednostranně, pokud L je krajní bod I), tedy $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = f(L) = R$.

Tedy $\exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{U}(L, \delta) \cap I : f(x) \in \mathcal{U}(R, \varepsilon)$.

Zároveň $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$, tj. $\exists n_0 \forall n > n_0 : z_n \in \mathcal{U}(L, \delta) \cap I$.

Ale navíc $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = S$, tedy $\exists n_1 \forall n > n_1 : f(z_n) \in \mathcal{U}(S, \varepsilon)$.

$\forall n > \max\{n_0, n_1\} : f(z_n) \in \mathcal{U}(S, \varepsilon) \wedge z_n \in \mathcal{U}(L, \delta) \wedge f(z_n) \in \mathcal{U}(R, \varepsilon)$

To je spor s $\mathcal{U}(S, \varepsilon) \cap \mathcal{U}(R, \varepsilon) = \emptyset$.

Faktičky na oddechnutí:

1. Pokud f a g spojité v A , tak i $f + g$ a fg jsou spojité v A .
Pokud navíc $g(A) \neq 0$, tak i $\frac{f}{g}$ je spoj. v A .
2. Pokud f je spoj. v A , $f(A) = B$ a g spoj. v B , tak $g(f(x))$ je spoj. v A .
3. Pokud je f spojitá a prostá na intervalu I , tak f je rostoucí nebo klesající na I .
4. Pokud je f spojitá a prostá na intervalu I , tak její inverzní funkce $g : f(I) \rightarrow I$ je spojitá na $f(I)$.
5. $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$ jsou spojité na $\mathbb{R}$.

Derivace

DEF Derivace funkce

Derivace f v A je rovna

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - f(A)}{x - A} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(A + h) - f(A)}{h}$$

Derivace f v A zprava je $f'_+(A) := \lim_{x \rightarrow A^+} \frac{f(x) - f(A)}{x - A}$.

Stejně tak zleva $f'_-(A) := \dots$

DEF Diferencovatelnost

f je diferencovatelná v A , pokud $f'(A)$ existuje a je reálná.

Pokud je f diferencovatelná v A , tak f je v A spojitá.

Chceme $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = f(A)$.

$$\lim_{x \rightarrow A} (f(x) - f(A) + f(A)) = \lim_{x \rightarrow A} ((f(x) - f(A)) \cdot \frac{x-A}{x-A} + f(A))$$

$$\stackrel{AL}{=} \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - f(A)}{x - A} \cdot \lim_{x \rightarrow A} (x - A) + \lim_{x \rightarrow A} (f(A)) = f(A)$$

- spojitá funkce nemusí mít derivaci
- spojitá funkce může mít nevlastní derivaci
- nespojitá funkce může mít nevlastní derivaci

Můžeme taky psát $f'(A)$ jako $(f(x))'_{x=A}$.

např. $(x^2 + \sin(x + 1))'_{x=0}$

TVRZ Aritmetika derivací

Nechť f a g jsou diferencovatelné v $A \in \mathbb{R}$. Potom

1. $(f(x) + g(x))'_{x=A} = f'(A) + g'(A)$
2. $\forall c \in \mathbb{R} : (c \cdot f(x))'_{x=A} = c \cdot f'(A)$
3. $(f(x) \cdot g(x))'_{x=A} = f(A) \cdot g'(A) + f'(A) \cdot g(A)$
4. Nechť $f(A) \neq 0$, potom $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x=A} = \frac{-f'(A)}{f^2(A)}$
5. Nechť $f(A) \neq 0$, potom $\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'_{x=A} = \frac{g'(A)f(A) - f'(A)g(A)}{f^2(A)}$

POZN: Platí i pro funkce, které mají nevlastní derivace, ale musíme přidat předpoklady. Tzv. sometimes maybe good sometimes maybe shit...

DKZ

1. aritmetika limit

2. aritmetika limit

$$\begin{aligned} 3. (f(x) \cdot g(x))'_{x=A} &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)g(x) - f(A)g(A)}{x-A} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)g(x) - f(x)g(A) + f(x)g(A) - f(A)g(A)}{x-A} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)(g(x) - g(A)) + g(A)(f(x) - f(A))}{x-A} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow A} \frac{g(x) - g(A)}{x-A} + \lim_{x \rightarrow A} g(A) \cdot \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - f(A)}{x-A} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} f(x) \cdot g'(A) + g(A) \cdot f'(A) \\ &= f(A) \cdot g'(A) + g(A) \cdot f'(A) \quad (f \text{ je diferencovatelná} \Rightarrow \text{spojitá}) \\ 4. \left(\frac{1}{f(x)}\right)'_{x=A} &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(A)}}{x-A} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{\frac{f(A) - f(x)}{f(A) \cdot f(x)}}{x-A} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(A) - f(x)}{(x-A) \cdot f(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow A} \frac{1}{f(x)f(A)} = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} \end{aligned}$$

5. plyne z 3. a 4.

$$f(x) = x^n \text{ pro } n \in \mathbb{N} \Rightarrow f'(A) = nA^{n-1}$$

Faktiček: $\exp'(x) = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x), \cos'(x) = -\sin(x)$

VĚTA Derivace složené funkce

Nechť f je diferencovatelná v A , nechť g je diferencovatelná v $B := f(A)$.

$$(g(f(x)))'_{x=A} = g'(B) \cdot f'(A)$$

DKZ

Myšlenka... To asi nemusíme umět...

$$\begin{aligned} (g(f(x)))'_{x=A} &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{g(f(x)) - g(f(A))}{x-A} \cdot \frac{f(x) - f(A)}{f(x) - f(A)} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{g(f(x)) - g(B)}{f(x) - B} \cdot \lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - f(A)}{x-A} \\ &= \lim_{x \rightarrow A} \frac{g(f(x)) - g(B)}{f(x) - B} \cdot f'(A) \end{aligned}$$

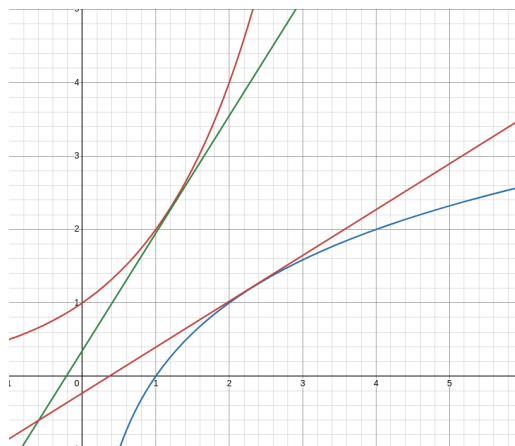
$$\text{Označme } D(x) = \frac{g(x) - g(B)}{x-B}, \lim_{x \rightarrow B} D(x) = g'(B)$$

$$\lim_{x \rightarrow A} \frac{g(f(x)) - g(B)}{f(x) - B} \cdot f'(A) = \lim_{x \rightarrow A} \frac{D(f(x))}{f(x) - B} \cdot f'(A) \stackrel{\text{VOLS F}}{=} g'(B) f'(A)$$

VĚTA Limita inverzní funkce

Nechť f je prostá funkce, nechť $f(A) = B$. Nechť $f'(A) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nechť $g := f^{-1}$.

$$\text{Potom } g'(B) = \frac{1}{f'(A)}$$



Tečna má převrácenou směrnici... Čím víc roste f , tím méně g .

Příklad: mějme $B = \exp(A) = e^A$, pak $\ln'(B) = \left(\frac{1}{\exp'(A)}\right) = \frac{1}{B}$. $\forall B \in (0, +\infty)$

Příklad: pro $x > 0$ a $r \in \mathbb{R}$ definujeme $f(x) = x^r = \exp(r \cdot \ln x)$

$$f'(x) \stackrel{\text{slož. funkce}}{=} (r \cdot \ln x)' \cdot \exp'(r \ln x) = \frac{r}{x} \cdot \exp(r \cdot \ln x) = \frac{r}{x} x^r = r \cdot x^{r-1}$$

VĚTA L'Hospitalovo pravidlo

$A \in \mathbb{R}^*$. Necht' na nějakém $\mathcal{P}(A, \varepsilon)$ platí, že f je diferencovatelná, g je nenulová, diferencovatelná, g' je nenulová.

1. Pokud $\exists \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ a pokud $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = \lim_{x \rightarrow A} g(x) = 0$, pak $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.
2. Pokud $\exists \lim_{x \rightarrow A} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ a pokud $\lim_{x \rightarrow A} |g(x)| = +\infty$, pak $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

VĚTA

f spojitá na $[A, B)$ pro $A < B$, $\lim_{x \rightarrow A^+} f'(x) = L \in \mathbb{R}^*$.

Potom $f'_+(A) = L$

DKZ

$$f'_+(A) = \lim_{x \rightarrow A^+} \frac{f(A) - f(x)}{A - x}$$

$\lim_{x \rightarrow A^+} (f(A) - f(x)) = 0$, protože f je spoj. v A^+ . $\lim_{x \rightarrow A^+} A - x = 0$.

Můžu použít l'Hospitala.

$$f'_x(A) = \lim_{x \rightarrow A^+} \frac{-f'(x)}{-1} = L$$

TVRZ

$A \in \mathbb{R}$, f fce.

1. Pokud $f'_+(A) > 0$, tak $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^+(A, \varepsilon) : f(x) > f(A)$
2. Pokud $f'_-(A) > 0$, tak $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^-(A, \varepsilon) : f(x) < f(A)$
3. Pokud $f'_+(A) < 0$, tak $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^+(A, \varepsilon) : f(x) < f(A)$
4. Pokud $f'_-(A) < 0$, tak $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^-(A, \varepsilon) : f(x) > f(A)$

DKZ

Pouze první. Ostatní analog.

$$D = f'_+(A) > 0 \quad (\text{může být i } +\infty)$$

$$0 < D = f'_+(A) = \lim_{x \rightarrow A^+} \frac{f(A) - f(x)}{A - x}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^+(A, \delta) : \frac{f(A) - f(x)}{A - x} \in \mathcal{U}(D, \epsilon)$$

$$\text{Volme } \epsilon = \frac{D}{2}.$$

Potom $\mathcal{U}(D, \epsilon)$ obsahuje jen kladná čísla. Tedy $\forall x \in \mathcal{P}^+(A, \delta) : \frac{f(A) - f(x)}{A - x} > 0$, tedy $f(A) - f(x) < 0$, tedy $f(A) < f(x)$.

VĚTA nutná podmínka pro existenci extrému

f je funkce definovaná na okolí bodu A . Pokud f má v A lokální extrém, tak buď $f'(A)$ neexistuje, nebo $f'(A) = 0$

DKZ

Obměnou.

$$f'(A) \neq 0, \text{ třeba } > 0.$$

$$\text{Potom } f'_+(A) > 0, f'_-(A) > 0.$$

Dle předchozího tvrzení $(\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^+(A, \varepsilon) : f(x) > f(A)) \wedge (\exists \varepsilon' > 0 : \forall x \in \mathcal{P}^-(A, \varepsilon') : f(x) < f(A))$

Tedy f nemá v A lokální extrém.

VĚTA Rolle

f je spojitá na intervalu $I = [A, B]$, $A < B$, $\forall x \in (A, B) \exists f'(x)$, $f(A) = f(B)$.

Potom $\exists C \in (A, B) : f'(C) = 0$

DKZ

Pokud je f konst., pak věta platí.

Pokud ne, $\exists x \in (A, B) : f(x) \neq f(A) = f(B)$, BÚNO $f(x) > f(A)$.

Princip maximality: f nabývá na I maxima v nějakém $C \in I$.

Jistě $C \notin \{A, B\}$.

V C je maximum (a $f'(C)$ existuje z předpokladu), takže $f'(C) = 0$.

VĚTA Lagrangeova věta o střední hodnotě

f je spojitá na intervalu $I = [A, B]$, $A < B$, $\forall x \in (A, B) \exists f'(x)$.

$$\exists C \in (A, B) : f'(C) = \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

DKZ

$$p(x) := f(A) + (x - A) \cdot \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

$$g(x) := f(x) - p(x)$$

Jistě g je spoj na I .

$$\forall x \in (A, B) : \exists g'(x) = f'(x) - p'(x) = f'(x) - \frac{f(B) - f(A)}{B - A}$$

Navíc $g(A) = g(B)$. Podle Rolle $\exists C \in (A, B) : g'(C) = 0$.

$$f'(C) - \frac{f(B)-f(A)}{B-A} = 0, \text{ tedy } f'(C) = \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$$

VĚTA O derivaci a monotonii

f spojitá na I .

1. Pokud pro každý vnitřní bod $x \in I$ platí $f'(x) > 0$, tak f je rostoucí na I .
2. Pokud pro každý vnitřní bod $x \in I$ platí $f'(x) \geq 0$, tak f je neklesající na I .

apod.

DKZ

Dokazujeme 1. ostatní analog.

Volme $A, B \in I, A < B$. Chceme $f(A) < f(B)$.

Lagrangeova věta: $\exists C \in (A, B) : f'(C) = \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$

Derivace je kladná, takže

$$\frac{f(B)-f(A)}{B-A} > 0, \text{ tedy } f(B) > f(A)$$

DEF Konvexnost

I je netriviální interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1. f je **konvexní** na I , pokud $\forall A, x, B \in I : A < x < B : f(x) \leq f(A) + (x - A) \cdot \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$
2. f je **ryze konvexní** na I , když $\forall A, x, B \in I : A < x < B : f(x) < f(A) + (x - A) \cdot \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$
3. f je **konkávní** na I , pokud $\forall A, x, B \in I : A < x < B : f(x) \geq f(A) + (x - A) \cdot \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$
4. f je **ryze konkávní** na I , když $\forall A, x, B \in I : A < x < B : f(x) > f(A) + (x - A) \cdot \frac{f(B)-f(A)}{B-A}$

VĚTA

f spojitá na intervalu I , má derivaci na každém vnitřním bodě $x \in I$.

Pokud f' je rostoucí na I , tak f je ryze konvexní na I .

Pokud f' je neklesající na I , tak f je ryze konvexní na I .

Pokud f' je klesající na I , tak f je ryze konkávní na I .

Pokud f' je nerostoucí na I , tak f je konkávní na I .

Prostě normal derivace behaviour shit

BEZ DK LET'S GOOOOO

POZN: Jensenova nerovnost

pokud f je konvexní na I a $A, B \in I$

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{f(A)+f(B)}{2}$$

DEF n-tá derivace

f je definovaná na $I, A \in I$.

Pro $n \in \mathbb{N}_0$ definuji n -tou derivaci f , nebo n -tého řádu ($f^{(n)}$) takto:

1. $f^{(0)}(A) = f(A)$
2. pro $n \geq 1$, pokud existuje $f^{(n-1)}$, definuji $f^{(n)}(A) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(A+h) - f^{(n-1)}(A)}{h}$

Prostě derivace derivace derivace derivace ... funkce žeo.

DEF Taylorův polynom

f je funkce, která má v $A \in \mathbb{R}$ derivaci řádu $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť je tato derivace vlastní, nechť je f spojitá v A .

Potom Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě A je

$$\begin{aligned} T_n^{f,A}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(A)}{k!} (x-A)^k \\ &= f(A) + f'(A)(x-A) + \frac{f''(A)}{2}(x-A)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(A)}{n!}(x-A)^n \end{aligned}$$

Faktíček mamíček: Pokud má funkce f v bodě A Taylorův polynom $T(x)$ řádu n , tak $\lim_{x \rightarrow A} \frac{f(x) - T(x)}{(x-A)^n} = 0$, navíc $T(x)$ je jediný polynom stupně $\leq n$ s touto vlastností.

DEF Taylorova řada

f je funkce, která má v A vlastní derivace všech řádů.

Taylorova řada funkce f v bodě A je

$$T^{f,A}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(A)}{k!} (x-A)^k$$

Očičko: Pro $f(x) = \exp(x)$, $A = 0$ máme $T^{f,0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \exp(x)$

POZN: Obecně pro f

1. $T^{f,A}(x)$ nemusí existovat (pokud f nemá v A vl. derivace všech řádů)
2. I když $T^{f,A}(x)$ existuje, nemusí pro všechna $x \in \mathbb{R}$ konvergovat.
3. I když $T^{f,A}(x)$ konverguje, nemusí být rovna $f(x)$.

Primitivní funkce

DEF

f funkce na otevřeném intervalu I .

F je primitivní funkce k funkci f na I , pokud $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

TVRZ

$I \neq \emptyset$ je otevřený interval a $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Potom

1. pokud $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ je primitivní funkce k f na I a $c \in \mathbb{R}$, tak $G(x) := F(x) + c$ je také primitivní funkce f na I .
2. pokud F_1 a F_2 jsou primitivní funkce f na I , tak $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in I : F_1(x) = F_2(x) + c$.

DKZ

1. $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$
2. $r(x) := F_1(x) - F_2(x)$. Potom $r'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$
 r' je nezáporná i nekladná $\Rightarrow r(x)$ je konstantní $\Rightarrow r(x) = c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$.

Zápis: " $\int f(x) dx = F(x) + c$ " znamená, že F je prim. funkce k f (na I).

Pokud F je prim. fce k f na $I \neq \emptyset$, tak F je na I spojitá, protože jinak by F nemělo vl. derivaci.

Fakt: Pokud f je spojitá na ot. intervalu $I \neq \emptyset$, tak f má I prim. funkci.

| **POZN:** existují i nespojitě fce mající prim. funkci...

| **POZN:** pro funkce $\frac{1}{\ln(x)}$, $\exp(-x^2)$, $\sin(x^2)$, $\sqrt{1-x^4}$ nelze prim. funkci "vyjádřit vzorečkem".

TVRZ

Pokud má funkce f prim. funkci F' a g prim. funkci G , tak pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$\alpha f(x) + \beta g(x)$ má prim. funkci $\alpha F(x) + \beta G(x)$.

VĚTA O substituci

Pokud má f na intervalu $I \neq \emptyset$ prim. funkci F a pokud φ je funkce z ot. intervalu J do I , která má v každém bodě J vlastní derivaci $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ má na J prim. funkci $F(\varphi(t))$.

VĚTA Integrace per partes

f a g jsou spojité na I a mají tam prim. funkce F, G .

$f \cdot G$ a $F \cdot g$ mají na I prim. funkce a platí $\int f \cdot G + \int F \cdot g = F \cdot G + c$,

neboli $\int f \cdot G = FG - \int F \cdot g$.

TVRZ

f prim funkce F na ot. intervalu I .

Potom $\forall A \in I$ buď $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) = f(A)$, nebo $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x)$ neexistuje.

Podobně $x \rightarrow A^-$.

DKZ

Nechť existuje $\lim_{x \rightarrow A^+} f(x) =: L \in \mathbb{R}^*$. Chceme $L = f(A)$.

Víme: $\lim_{x \rightarrow A^+} F'(x) = L$, zároveň F je spojitá v A zprava (protože F je spojitá na I , jinak by neměla vl. derivaci f).

Podle věty o jednostranné derivaci: $F'_+(A) = L$. Ale $F'(A) = F'_+(A) = f(A)$.

$f(A) = L$

Určitý integrál

DEF Newtonův integrál

$A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$, f má prim. funkci F na (A, B) .

Nechť existují *vlastní* limity $\lim_{x \rightarrow A^+} F(x) =: F(A+)$ a $\lim_{x \rightarrow B^-} F(x) =: F(B-)$.

Potom **Newtonův integrál** f na (A, B) je $(N) \int_A^B f(x) dx = (N) \int_A^B f := F(B-) - F(A+)$.

Pokud $(N) \int_A^B f$ existuje, řeknu, že f je newtonovsky integrovatelná.

Množinu newtonovsky integrovatelných funkcí na (A, B) značím $\mathcal{N}(A, B)$.

$F(B-) - F(A+)$ značím $[F(x)]_A^B$.

| **POZN:** Pokud f má prim. funkci F na ot. intervalu I obsahujícím $A, B \in I$, $A < B$, tak $F(A+) = F(A)$, $F(B-) = F(B)$, tedy $[F(x)]_A^B = F(B) - F(A)$.

TVRZ

Pokud f je spojitá na $[A, B]$, $A < B$, tak $f \in \mathcal{N}(A, B)$.

DKZ

Definujeme funkci $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} f(x) & \text{pro } x \in [A, B] \\ f(A) & \text{pro } x < A \\ f(B) & \text{pro } x > B \end{cases}$$

Pozorování: f_2 je spoj. na $\mathbb{R} \Rightarrow f_2$ má na $\mathbb{R}$ prim. funkci F_2 , která je také spojitá. Zajisté F_2 je prim. funkce k f_2 na (A, B) .

Navíc $F_2(A+) = F_2(A)$, $F_2(B-) = F_2(B)$.

$$(N) \int_A^B f = [F_2(x)]_A^B$$

Per partes pro Newtonův integrál:

Nechť f, g jsou spojitě na $[A, B]$, $A < B$, jejich prim. funkce na (A, B) jsou F, G .

$$\text{Potom } (N) \int_A^B fG = [FG]_A^B - (N) \int_A^B F \cdot g.$$

Substitute pro Newtonův integrál:

φ je spojitá na $[\alpha, \beta]$, diferencovatelná na (α, β) , nechť φ zobrazí $[\alpha, \beta]$ na interval $[A, B]$.

Nechť f je spojitá na $[A, B]$ a má na (A, B) prim. funkci F .

$$\text{Potom } (N) \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) dt = (N) \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

–

Podle konvence:

$$\text{Pokud } A > B \rightarrow (N) \int_A^B f := (N) \int_B^A f$$

$$\text{Pokud } A = B \rightarrow (N) \int_A^B f := 0$$

DEF Dělení intervalu

Dělení intervalu $[A, B]$ je konečná posloupnost $A_0 < A_1 < A_2 < \dots < A_k$, kde $A_0 = A$, $A_k = B$.

Označme $I_i = [A_{i-1}, A_i]$, $i = 1, \dots, k$

$$|I_i| = A_i - A_{i-1}$$

Pro funkci $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$ a dělení $A_0 < A_1 < \dots < A_k$ označím $m_i := \inf_{x \in I_i} \{f(x)\}$, $M_i := \sup_{x \in I_i} \{f(x)\}$

DEF Dolní Reimannova suma

Dolní Reimannova suma pro f a dělení $D := (A_0, \dots, A_k)$ je

$$s(f, D) := \sum_{i=1}^k m_i |I_i|$$

DEF Horní Reimannova suma

Horní Reimannova suma pro f a dělení $D := (A_0, \dots, A_k)$ je

$$S(f, D) := \sum_{i=1}^k M_i |I_i|$$

DEF Horní/dolní Reimannův integrál

Dolní Reimannův integrál f na $[A, B]$ je

$$(R) \int_A^B f := \sup_{D \text{ dělení } [A, B]} s(f, D)$$

Horní Reimannův integrál f na $[A, B]$ je

$$(R) \int_A^B f := \inf_{D \text{ dělení } [A, B]} S(f, D)$$

DEF Riemannův integrál

Pokud $(R) \int_A^B f$ i $(R) \int_A^B f$ jsou reálné a rovnají se, tak jejich hodnotu označíme $(R) \int_A^B f$, nazveme ji **Reimannův integrál** f na $[A, B]$. Množinu riemannovsky int. funkcí na $[A, B]$ označíme $\mathcal{R}[A, B]$.

Aplikace integrálů

Fakta:

1. Pokud pro nějakou funkci f existuje Newtonův i Riemannův integrál, pak se rovnají.
2. Pokud je f na intervalu $[A, B]$ spojitá nebo je na $[A, B]$ monotónní, pak $(R) \int_A^B f$ existuje.

VĚTA Odhad integrálu monotónní funkce

$n \in \mathbb{N}, f : [1, n] \rightarrow \mathbb{R}$

1. pokud f neklesající na $[1, n]$, tak $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f \leq \sum_{k=2}^n f(k)$
2. pokud f nerostoucí na $[1, n]$, tak $\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f \geq \sum_{k=2}^n f(k)$

DKZ

f neklesající na $[1, n]$, tedy $(R) \int_1^n f$ existuje.

Volme na $[1, n]$ dělení $D = (1, \dots, n)$.

Potom dolní Riemannova suma $s(f, D) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \cdot 1$.

$$S(f, D) = \sum_{k=2}^n f(k) \cdot 1$$

$$\text{Tedy } s(f, D) \leq \int_1^n f \leq S(f, D)$$

VĚTA Integrální kritérium konvergence řad

$f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je nezáporná, nerostoucí.

Potom $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n f \right) \in \mathbb{R}$.

DKZ

Protože $f \geq 0$, tak $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ je reálná nebo $+\infty$.

Protože f nerostoucí, tak $\forall n : (R) \int_1^n f$ existuje.

Protože $f \geq 0$, tak $\int_1^n f$ je neklesající v proměnné n .

Tedy $L := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n f \right)$ existuje.

$\Rightarrow$

Pokud $S := \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \in \mathbb{R}$ (konverguje). Potom $\forall n : \int_1^n f \stackrel{\text{odhad}}{\leq} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \stackrel{\text{f. nezáp.}}{\leq} S$.

Tedy i $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f \leq S$, tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow$

Pokud $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_1^n f \right) = L \in \mathbb{R}$, tak: $\forall n : L \geq \int_1^n f \stackrel{\text{odhad}}{\geq} \sum_{k=2}^n f(k) = \sum_{k=1}^n f(k) - f(1)$

Tedy $\forall n : \sum_{k=1}^n f(k) \leq L + f(1)$, tedy $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$.

DEF Křivka

Mějme kompaktní interval $I = [A, B]$ a d -tici spojitých funkcí $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$, kde $\varphi_i : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Potom **křivka** s parametrizací $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ je množina

$$K = \left\{ (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_d(t)) \in \mathbb{R}^d, t \in I \right\}$$

Křivka K je **hladká**, pokud $\forall i = 1, \dots, d$ má φ_i na I vlastní spojitou derivaci.

DEF Délka hladké křivky

Hladká křivka K s parametrizací $(\varphi_1, \dots, \varphi_d)$.

Její délka je

$$\int_A^B \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2 + \dots + \varphi_d'(t)^2} dt.$$

Například pro křivku grafu funkce $f : [A, B] \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = f(t), t \in [A, B]$$

$$\int_A^B \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \varphi_2'(t)^2} dt = \int_A^B \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Vlastnosti Riemannova a Newtonova integrálu

- když je f neomezená na $[A, B]$, tak $f \notin \mathcal{R}[A, B]$