

Contents

Skalární součin	3
Definice: Skalární součin nad $\mathbb{R}$	3
Definice: Skalární součin nad $\mathbb{C}$	3
Jednoznačnost skalárních součinů obrazů báze	3
Norma a kolmost	3
Definice: Norma indukovaná skalárním součinem	3
Definice: Kolmost	3
Věta: Pythagorova věta	3
Věta: Cauchyho–Schwarzova nerovnost	4
Tvrzení: Trojúhelníková nerovnost	4
Definice: Norma (obecně)	4
Ortogonalní a ortonormální systémy	5
Definice: Ortogonalní a ortonormální systém	5
Tvrzení: Ortonormální systém je lin. nezávislý	5
Věta: Fourierovy koeficienty	5
Gramova-Schmidtova ortogonalizace	5
Ortogonalní doplněk a projekce	6
Definice: Ortogonalní doplněk	6
Věta: O ortogonalní projekci	7
Ortogonalní doplněk v $\mathbb{R}^n$	7
Věta: Ortogonalní doplněk v $\mathbb{R}^n$	7
Věta: Ortogonalní projekce v $\mathbb{R}^m$	7
Matice projekce	8
Lineární regrese - metoda nejmenších čtverců	8
Věta: Množina řešení metodou nejmenších čtverců	8
Ortogonalní matice	9
Definice: Ortogonalní matice	9
Tvrzení: Charakterizace ortogonálních rovnic	9
Vlastnosti	9
Householderova matice	9
Givensova matice	9
Determinanty	10
Definice: Determinant	10
Tvrzení: $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ je regulární	10
Věta: Multiplikativnost determinantu	10
Věta: Laplaceův rozvoj	11
Věta: Cramerovo pravidlo	11
Definice: Adjungovaná matice	11
Věta: O adjungované matici	11
Věta: Věta o objemu rovnoběžnostěnu	11
Vlastní čísla	12
Definice: Vlastní čísla a vlastní vektory	12
Definice: Charakteristický polynom	12
Definice: Algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla	12
Definice: Stopa matice	13
Tvrzení: Součin a součet vlastních čísel	13
Tvrzení: Vlastnosti vlastních čísel	13

Tvrzení: Komplexně sdružené číslo k vlastnímu číslu je také vlastní číslo	13
Definice: Spektrum a spektrální poloměr	13
Definice: Matice společnice	13
Tvrzení: O matici společnici	13
Věta: Cayleyho-Hamiltonova	13
Podobnost	14
Definice: Podobnost	14
Tvrzení: Vlastní čísla podobných matic	14
Definice: Diagonalizovatelnost	14
Věta: Charakterizace diagonalizovatelnosti	15
Jordanova normální forma	15
Definice: Jordanova buňka	15
Definice: Jordanova normální forma	15
Věta: O Jordanově normální formě	16
Symetrické matice	16
Definice: Hermitovská matice a transpozice	16
Věta: Spektrální rozklad symetrické matice	16
Nezáporné matice	16
Věta: Perronova	16
Výpočet vlastních čísel	17
Věta: Gerschgorinovy disky	17
Positivně (semi-)definitní matice	17
Definice: Positivně (semi-)definitní matice	17
Věta: Charakterizace pozitivní definitnosti	17
Věta: Charakterizace pozitivní <i>semidefinitnosti</i>	18
Metody na testování pozitivní definitnosti	18
Věta: Rekurentní vzoreček na testování pozitivní definitnosti	18
Věta: Choleského rozklad	18
Věta: Skalární součin a pozitivní definitnost	19
Kvadratické formy	19
Definice: Bilineární a kvadratická forma	19
Definice: Matice bilineární formy a kvadratické formy	20
Věta: Maticové vyjádření forem	20
Věta: Sylvestruv zákon setrvačnosti	20
Definice: Polární báze	20
Věta: SVD rozklad	21
Definice: Redukovaný SVD rozklad	21
Definice: Číslo podmíněnosti	21

Skalární součin

DEF Skalární součin nad $\mathbb{R}$

V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, pak *skalární součin* je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$, splňující pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\langle x, x \rangle \geq 0$, rovnost pouze pro $x = 0$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

| **POZN:** $\langle o, x \rangle = \langle x, o \rangle = 0$

DEF Skalární součin nad $\mathbb{C}$

V vektorový prostor nad $\mathbb{C}$, pak *skalární součin* je zobrazení $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{C}$, splňující pro všechna $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{C}$:

- $\langle x^T, x \rangle \geq 0$, rovnost pouze pro $x = 0$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

| **POZN:** $\langle o, x \rangle = \langle x, o \rangle = 0$

Standardní skalární součin v $\mathbb{R}$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

V prostoru matic $\mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{ij} = \text{trace}(AB^T)$$

Jednoznačnost skalárních součinů obrazů báze

Báze $z_1, \dots, z_n$

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_i \alpha_i z_i, \sum_j \beta_j z_j \right\rangle = \sum_i \alpha_i \left\langle z_i, \sum_j \beta_j z_j \right\rangle = \sum_i \sum_j \alpha_i \beta_j \langle z_i, z_j \rangle$$

Norma a kolmost

Pro nějaký skalární součin definujeme *normu* a *kolmost*. Bcha v jednom skalárním součinu může být něco kolmý a v druhým ne. Záleží o jakém skalárním součinu mluvíme.

DEF Norma indukovaná skalárním součinem

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ kde } x \in V$$

Intuitivně odpovídá délce/velikosti vektoru.

DEF Kolmost

Vektory $x, y \in V$ jsou *kolmé*, pokud $\langle x, y \rangle = 0$, značení $x \perp y$.

VĚTA Pythagorova věta

Pokud $x, y \in V$ jsou *kolmé*, pak

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

DKZ

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

VĚTA Cauchyho–Schwarzova nerovnost

$\forall x, y \in V$ platí:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

DKZ

Důkaz nad $\mathbb{R}$.

Pro nulový vektor y věta triviálně platí.

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle x + ty, x + ty \rangle \geq 0 \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \cdot t \langle x, y \rangle + t^2 \cdot \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

f je kvadratická funkce vůči t . Je nezáporná. Má tedy maximálně jeden kořen.

Z toho plyne $D \leq 0$.

$$\begin{aligned} D &= 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \\ \Rightarrow \langle x, y \rangle^2 &\leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \text{ (diskriminant nekladný)} \\ \Rightarrow |\langle x, y \rangle| &\leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ (odmocněno)} \end{aligned}$$

TVRZ Trojúhelníková nerovnost

Jako důsledek Cauchyho–Schwarzovy věty platí:

Pro každé $x, y \in V$:

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

DKZ

$$z = a + bi$$

$$z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq |a|$$

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \overline{\langle x, y \rangle} + \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \cdot \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + 2 \cdot |\langle x, y \rangle| + \langle y, y \rangle \\ &\leq \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

DEF Norma (obecně)

Zobrazení $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$).

1. $\forall x \in V : \|x\| \geq 0$, rovnost pouze pro $x = 0$
2. $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
3. trojúhelníková nerovnost $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

pro $p = 1, 2, \dots$: **p-norma vektoru** je: $\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

Ortogonalní a ortonormální systémy

DEF Ortogonalní a ortonormální systém

Systém vektorů je:

1. **ortogonalní**, pokud jsou na sebe po dvou kolmé
2. **ortonormální**, pokud jsou *ortogonalní* a $\|v_i\| = 1$ pro všechna i .

Ortogonalní systém můžeme znormovat, pokud v něm není nulový vektor. Každý vektor vydělíme jeho normou.

TVRZ Ortonormální systém je lin. nezávislý

$z_1, \dots, z_n$ je *ortonormální* systém. Je také LN.

DKZ

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i = o$$

$$0 = \langle o, z_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i z_i, z_k \right\rangle = \sum \alpha_i \langle z_i, z_k \rangle = \alpha_k \langle z_k, z_k \rangle$$

$$\forall k : \alpha_k = 0$$

VĚTA Fourierovy koeficienty

$z_1, \dots, z_n$ *ortonormální* báze V .

$$\forall x \in V : x = \sum_{i=1}^n \langle x, z_i \rangle z_i$$

Gramova-Schmidtova ortogonalizace

Z nějaké báze se snažím vytvořit ortonormální bázi.

Na začátku mám jeden vektor ze systému. Ten znormuji.

Pak vezmu další, udělám projekci na prostor, který tvoří už existující kolmé vektory.

Pak tuto projekci od něj odečtu. Dostanu vektor kolmý na všechny ostatní.

Ten pak jenom znormuji.

$x_1, \dots, x_n$ jsou LN vektory.

1. for $k := 1$ to n do
2. $y_k = x_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle x_k, z_j \rangle z_j$ (vypočítám kolmici)
3. $z_k = \left(\frac{1}{\|y_k\|}\right) y_k$ (normalizujeme na délku 1)
4. end for

$z_1, \dots, z_n$ je báze $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$

TVRZ

Každý konečně generovaný prostor se skalárním součinem má ortonormální bázi.

TVRZ

Báze $B = \{z_1, \dots, z_n\}$ prostoru V . Pak

$$\langle x, y \rangle = [x]_B^T \overline{[y]_B}$$

je skalární součin a báze B je v něm (součinu) ortonormální bází.

DKZ

Ověření axiomů pro sk. součin.

Báze je ortonormální: $\langle z_i, z_j \rangle = [z_i]_B^T \overline{[z_j]_B} = e_i^T e_j = 0$

Pro každou reg. matici můžu v $\mathbb{R}^n$ udělat skalární součin.

$$\langle x, y \rangle = [x]_B^T [y]_B = (Ax)^T (Ay) = x^T A^T A y$$

Ortogonalní doplněk a projekce

DEF Ortogonalní doplněk

Ortogonalní doplněk množiny vektorů $M \subseteq V$ je

$$M^\perp := \{x \in V; \forall y \in M : \langle x, y \rangle = 0\}$$

Vlastnosti:

1. $M^\perp$ je podprostor V
2. $M \subseteq N \Rightarrow N^\perp \subseteq M^\perp$
v N je víc vektorů, $N^\perp$ je teda omezenější
3. $M^\perp = \text{span}(M)^\perp$

Vlastnosti doplňku *podprostoru*:

Buď $U \subseteq V$, buď $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U a buď $z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, \dots, z_n$ její rozšíření na ortonormální bázi V .

Pak $z_{m+1}, \dots, z_n$ je ortonormální báze $U^\perp$.

Tedy: $\text{span}\{z_{m+1}, \dots, z_n\} = U^\perp$

DKZ

$\text{span} \subseteq U^\perp$: vektory jsou kolmé na bázi U , tedy patří do $U^\perp$. Jejich lin komb. taky.

$U^\perp \subseteq \text{span}$:

$$x \in U^\perp \subseteq V$$

$$x = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i \rangle z_i + \sum_{i=m+1}^n \langle x, z_i \rangle z_i$$

x je ale kolmý na všechny z_k , kde $k \leq m$

takže

$$x = \sum_{i=m+1}^n \langle x, z_i \rangle z_i \Rightarrow x \in \text{span}\{\dots\}$$

1. $\dim V = \dim U + \dim U^\perp$
2. $V = U + U^\perp$

3. $U \cap U^\perp = \{0\}$
4. $(U^\perp)^\perp = U$

VĚTA O ortogonální projekci

Buď $U \subseteq V$. Pak $\forall x \in V$ existuje právě jedna projekce $x_U \in U$ do prostoru U .

Navíc, je-li $z_1, \dots, z_m$ ortonormální báze U , pak

$$x_U = \sum_{i=1}^m \langle x, z_i \rangle z_i$$

TODO: projekce

Ortogonalní doplněk v $\mathbb{R}^n$

VĚTA Ortogonalní doplněk v $\mathbb{R}^n$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak $R(A)^\perp = \text{Ker}(A)$.

DKZ

$$R(A) = \text{span}\{A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{n*}\}$$

$$\begin{aligned} R(A)^\perp &= \{A_{1*}, A_{2*}, \dots, A_{n*}\}^\perp \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; \forall i : \langle A_{i*}, x \rangle = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = 0\} \end{aligned}$$

TVRZ

1. $\text{Ker}(A^T A) = \text{Ker}(A)$
2. $\mathcal{R}(A^T A) = \mathcal{R}(A)$
3. $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$

DKZ

$$x \in \text{Ker}(A^T A) \Rightarrow A^T A x = 0$$

$$x^T A^T A x = 0$$

$$(Ax)^T (Ax) = 0$$

$$\|Ax\|^2 = 0$$

$$Ax = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(A)$$

$$\mathcal{R}(A^T A) = \text{Ker}(A^T A)^\perp = \text{Ker}(A)^\perp = \mathcal{R}(A)$$

VĚTA Ortogonalní projekce v $\mathbb{R}^m$

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n .

Pak projekce vektoru $x \in \mathbb{R}^m$ do sloupcového prostoru $\mathcal{S}(A)$ je $x' = A(A^T A)^{-1} A^T x$.

DKZ

x dáno, x' hledám, že:

$$x' - x \in U^\perp = \mathcal{S}(A)^\perp = R(A^T)^\perp = \text{Ker}(A)$$

$$A^T(x' - x) = 0 \text{ (je v Ker)}$$

$$A^T x' = A^T x$$

$$x' = Ay \text{ (} y \text{ pomocné)}$$

$$A^T Ay = A^T x$$

$$y = (A^T A)^{-1} A^T x$$

$$x' = Ay = (A^T A)^{-1} A^T x$$

Matice projekce

Matice projekce do $S(A)$ je:

$$P := A(A^T A)^{-1} A^T$$

- je symetrická
- $P^n = P$. Výsledek Px je už v prostoru na který děláme ortogonální projekci, takže když jí uděláme víckrát, tak se už nic nestane.
- $PA = A$. Podobný, jako nahoře. Výsledek Ax je v $S(A)$, takže P už nic neudělá. Případně dosadím za P a dostanu to algebraicky.

Pro $V \subseteq \mathbb{R}^n$ matice projekce do $V^\perp$: $(I - P)$

Lineární regrese - metoda nejmenších čtverců

Pro hledání dobrých aproximací rovnic, které nemají řešení.

Mějme $Ax = b$, aby neměla řešení.

Chceme teda, aby se aproximace od řešení lišila co nejméně: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$. Velikost rozdílu vektoru aproximace (Ax) a opravdového vektoru b , by měl být co nejmenší.

Když použijeme euklidovskou normu, tak

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^n (A_{j*}x - b_j)^2$$

Z toho je tedy jméno metoda nejmenších čtverců...

VĚTA Množina řešení metodou nejmenších čtverců

Množina přibližných řešení soustavy $Ax = b$ metodou nejmenších čtverců je neprázdná a rovna množině řešení normálních rovnic.

DKZ

Rovnice vypadají takto:

$$A^T Ax = A^T b$$

Hledáme projekci b do $S(A)$. To je vektor nejbližší b , kterého můžeme dosáhnout v $S(A)$. Budeme pak řešit rovnice, aby $Ax = Pb$ (Pb je projekce b do $S(A)$).

Víme, že Ax je projekcí $\Leftrightarrow Ax - b \in S(A)^\perp = R(A^T)^\perp = \text{Ker}(A^T)$

Musí tedy platit $A^T(Ax - b) = 0$, neboli $A^T Ax = A^T b$

Jednoduše vidíme, že pokud $Ax = b$ má řešení, pak to je řešením i MNČ, to samé platí naopak.

| Jednoznačnost nastane, pokud A má LN sloupce. $A^T A$ je potom regulární.

Ortogonalní matice

Jsou to nějaké matice, které nedeformují objekty.

DEF Ortogonalní matice

Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *ortogonalní*, pokud $Q^T Q = I_n$

Matice $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je *unitární*, pokud $\overline{Q}^T Q = I_n$

TVRZ Charakterizace ortogonálních rovnic

Matice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je *ortogonalní* právě tehdy když sloupce Q tvoří *ortonormální* bázi $\mathbb{R}^n$.

DKZ

$$(Q^T Q)_{ij} = \langle Q_{*i}, Q_{*j} \rangle = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Z toho mimochodem vychází, že musí být i regulární (sloupce tvoří bázi $\mathbb{R}^n$).

Vlastnosti

| **POZN:** Ortogonalita se zachovává inverzí i transpozicí

| **POZN:** $Q^T Q = I_n \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$

Jsou uzavřené na součin, ale ne součet.

$$\mathbf{Dk:} (Q_1 Q_2)^T (Q_1 Q_2) = Q_2^T Q_1^T Q_1 Q_2 = I$$

TVRZ

Buď $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalní. Pak:

$$1. \forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Qx, Qy \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\mathbf{Důkaz:} \langle Qx, Qy \rangle = (Qx)^T Qy = x^T Q^T Qy = x^T y$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}^n : \|Qx\| = \|x\|$$

Takže zobrazení $x \rightarrow Qx$ zachovává úhly i délky.

- Všechny prvky ortogonalní matice jsou menší než 1.
- $\begin{pmatrix} 1 & o^T \\ o & Q \end{pmatrix}$ je ortogonalní matice

Householderova matice

je crazy

$$H(a) = I_n - 2 \cdot \frac{aa^T}{a^T a}, o \neq a \in \mathbb{R}^n$$

Otočíme podle normály $(2 \cdot \frac{aa^T}{a^T a} - I_n)$ a potom podle počátku (negace).

Givensova matice

Matice pro otočení. $c = \cos(\varphi)$, $s = \sin(\varphi)$

Předpoklad $c^2 + s^2 = 1$

$$G_{i,j}(c, s) = \begin{pmatrix} I & & \\ & c & -s \\ & s & c \\ & & & I \end{pmatrix}$$

Jednotková matice, ale na pozicích i a j dám ty cosiny.

Otáčí to podle os x_i a x_j proti směru hodinových ručiček.

Determinanty

DEF Determinant

Pro $A \in T^{n \times n}$:

$$|A| = \det(A) = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)} = \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) a_{1,p(1)} \dots a_{n,p(n)}$$

Pokud mám matici v REF tvaru, tak mi stačí vynásobit prvky na diagonále.

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Řádková linearita:

$$\det(A + e_i b^T) = \det(A) + \det(A + e_i(b^T - A_{i*}))$$

Vliv elementárních úprav na determinant:

Vynásobení i -tého řádku α : $\alpha \det(A)$

Výměna i -tého a j -tého řádku. $\det(A) = -\det(A')$

Každá permutace řádků: $\det(A) = \text{sgn}(p) \det(A')$

T tohoto také plyne, že pokud má matice dva stejné řádky $\Rightarrow \det(A) = 0$

Přičtení α -násobku j -tého řádku k i -tému: $\det(A) = \det(A')$

$$\det(A') = \det(A) + \alpha \det(A \text{ s dvěma řádky } j) = \det(A) + 0$$

TVRZ $\det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ je regulární

Důkaz: A je regulární $\Leftrightarrow \text{REF}(A)$ má na diagonále nenulová čísla.

VĚTA Multiplikativnost determinantu

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \text{ pouze pro čtvercové}$$

DKZ

1. A singularní: $0 = \det(AB) = \det(A) \det(B) = 0 \det(B)$

2. A regulární:

1. A je matice elem. úpravy:

$$\text{Násobení řádku } \alpha: \det(AB) = \alpha \det(B) = \det(A) \det(B) = \alpha \det(B)$$

Přičtení α násobku: **TODO**

2. Obecně:

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 E_2 E_3 \dots E_k B) \\ &= \det(E_1) \det(E_2 E_3 \dots E_k B) \\ &= \det(E_1) \det(E_2) \det(E_3) \dots \det(E_k) \det(B) \\ &= \det(E_1 E_2 E_3 \dots E_k) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \end{aligned}$$

VĚTA Laplaceův rozvoj

Vyberu si libovolný i -tý řádek.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{ij})$$

kde A^{ij} vznikne z matice A vyškrtnutím i -tého řádku a j -tého sloupce.

DKZ

$$1. \ A_{ix} = e_j^T$$

VĚTA Cramerovo pravidlo

Buď $A \in T^{n \times n}$ regulární, $b \in T^n$. Pak řešení soustavy $Ax = b$ je dáno vzorcem:

$$x_i = \frac{\det(A + (b - A_{*i})e_i^T)}{\det(A)}, \quad i = 1, \dots, n$$

DEF Adjungovaná matice

Pro matici A je

$$\text{adj}(A)_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A \text{ bez řádku } i \text{ a sloupce } j)$$

VĚTA O adjungované matici

Pro každou $A \in T^{n \times n}$ platí

$$A \text{ adj}(A) = \det(A) I_n$$

TODO: důkaz

Z toho plyne důsledek: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

Taky dokážeme poznat, že je inverzní matice celočíselná, pokud $\det(A) = \pm 1$.

VĚTA Věta o objemu rovnoběžnostěnu

Buď $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Objem rovnoběžnostěnu s hranami danými řádky matice A (jakožto m -dimenzionálního útvaru) je $\sqrt{\det(AA^T)}$

Speciálně pro $m = n$ je objem $|\det(A)|$.

$$\sqrt{\det(AA^T)} = \sqrt{\det(A) \det(A^T)} = \sqrt{\det(A)^2} = |\det(A)|$$

DKZ

Indukcí podle m .

Objem rbš. když přidáme další vektor bude objem toho bez něj · výška.

$$b_m \in V^\perp, c_m \in V, a_m = b_m + c_m$$

$$A = \begin{pmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & a_m^T & - \end{pmatrix}$$

Odečtu c_m (jenom násobky a_1 až a_{m-1}):

$$A' = \begin{pmatrix} - & a_1^T & - \\ - & a_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & b_m^T & - \end{pmatrix}$$

$$\det(AA^T) = \det(A' A'^T)$$

$$A' = E_1 \cdots E_k A$$

$$\det(A' A'^T) = \det(E_k) \cdot \det(E_{k-1}) \cdot \det(E_1) \cdot \det(AA^T) \cdot \det(E_1) \cdots \det(E_k) = \det(AA^T)$$

Determinanty E_i jsou 1, protože to jsou ekviv. operace přičtení násobku řádku.

$$\begin{pmatrix} D \\ b_m^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^T & b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DD^T & Db_m \\ b_m^T D^T & b_m^T b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & b_m^T b_m \end{pmatrix}$$

$$\det(AA^T) = \det(DD^T) \cdot b_m^T b_m$$

$$\sqrt{\det(AA^T)} = \sqrt{\det(DD^T)} \cdot \|b_m\|$$

Dostali jsme “objem/obsah” základny · výška. ■

Vlastní čísla

DEF Vlastní čísla a vlastní vektory

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak $\lambda \in \mathbb{C}$ je **vlastní číslo** matice A a $x \in \mathbb{C}^n$ jemu příslušný **vlastní vektor**, pokud

$$Ax = \lambda x, x \neq 0$$

Vlastní vektor není určen jednoznačně. Každý jeho násobek je také vlastním vektorem.

λ je vlastním číslem, když $\det(A - \lambda I_n) = 0$. Plyne z definice. Když rovnost hodím na jednu stranu, tak dosadnu, že to musí být singulární matice.

Matice projekce do prostoru U má vlastní číslo 1 s v. vektory $\in U$, a 0 s v. vektory $\in U^\perp$.

U trojúhelníkových matic jsou vlastní čísla na diagonále.

Vycházím z toho, že $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 0$$

Když odečtu λ :

$$(a_1 - \lambda) \cdot (a_2 - \lambda) \cdots (a_n - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = a_1, \dots, a_n$$

DEF Charakteristický polynom

Charakteristický polynom matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ proměnné λ je

$$p_{A(\lambda)} = \det(A - \lambda I_n)$$

Vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu.

DEF Algebraická a geometrická násobnost vlastního čísla

1. Algebraická násobnost λ je násobnost λ jakožto kořene ch. polynomu.
2. Geometrická násobnost λ je rovna $n - \text{rank}(A - \lambda I_n)$.
tj. počtu lin. nezávislých vlastních vektorů, které odpovídají λ .

DEF Stopa matice

Stopa matice $A \in \mathbb{T}^{n \times n}$ je $\text{trace}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

TVRZ Součin a součet vlastních čísel

1. $\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$
2. $\text{trace}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$

DKZ

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow \det(A) = (-1)^n (-\lambda_1)(-\lambda_2) \cdots (-\lambda_n) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

trace TODO**TVRZ** Vlastnosti vlastních čísel

1. je-li A regulární, pak A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ a vlastní vektory stejný.
2. A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory stejný
3. αA má vlastní čísla $\alpha \lambda_1, \dots, \alpha \lambda_n$ a vlastní vektory stejný
4. $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vektory stejný
5. A^T má stejný vlastní čísla, ale jiný vlastní vektory

nemusíme si pamatovat.

TVRZ Komplexně sdružené číslo k vlastnímu číslu je také vlastní číslo

Pokud jsou $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla, tak $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ jsou také.

Důkaz přes úpravy $\det(A - \lambda I_n) = 0$

DEF Spektrum a spektrální poloměr

Spektrum je množina vlastních čísel.

Spektrální poloměr je poloměr nejmenšího kruhu, který pokrývá všechny vlastní čísla v komplexní rovině.

DEF Matice společnice

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

$$C(p) := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

TVRZ O matici společnici

$$\text{Platí } p_{C(p)}(\lambda) = (-1)^n p(\lambda)$$

Tedy vlastní čísla matice $C(p)$ odpovídají kořenům polynomu $p(x)$.

Důkaz přes dosazení $C(p)$ do charakteristického polynomu, upravení matice ze zdola přičítat postupně λ násobek řádku, abychom dostali jednotkovou podmatici vlevo dole a potom udělali laplacův rozvoj podle prvního řádku.

VĚTA Cayleyho-Hamiltonova

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ a

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = (-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$$

Pak

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n = 0$$

DKZ

$$M \cdot \text{adj}(M) = \det(M) I_n$$

$$(A - \lambda I_n) \text{adj}(A - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n) I_n$$

Adjungovaná matice bude matice polynomů max stupně $n - 1$, takže se dá zapsat:

$$\text{adj}(A - \lambda I_n) = B_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0$$

Dosadíme:

$$(A - \lambda I_n)(B_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + B_1 \lambda + B_0) = ((-1)^n \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0) I_n$$

Porovnám koeficienty u levé a pravé strany:

$$\lambda^n \dots - B_{n-1} = (-1)^n I_n$$

$$\lambda^j \dots AB_j \cdot B_{j-1} = \alpha_j I_n$$

$$\lambda^0 \dots AB_0 = \alpha_0 I_n$$

j -tou rovnicí vynásobím A^j , pak je všechny sečtu a dostanu jednu:

$$-A^n B_{n-1} + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + \alpha_0 I_n = p_A(A)$$

Nalevo se to všechno zkrátí na 0...

Důsledky

Buď $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}$ je

$$A^k \in \text{span}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$$

A^k je lin. kombinací mocnin matic A až do stupně $n - 1$.

Podobnost

DEF Podobnost

Matice $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jsou podobné, pokud existuje regulární $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$, že

$$A = SBS^{-1}$$

TVRZ Vlastní čísla podobných matic

Podobné matice mají stejná vlastní čísla.

DKZ

$$\det(A - \lambda I) = \det(SBS^{-1} - \lambda SIS^{-1})$$

$$= \det(S(B - \lambda I)S^{-1}) = \det(S) \det(B - \lambda I) \det(S^{-1}) = \det(B - \lambda I)$$

DEF Diagonalizovatelnost

Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

kde S je regulární a Λ diagonální.

Tomuto tvaru se říká *spektrální rozklad*.

VĚTA Charakterizace diagonalizovatelnosti

Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je diagonalizovatelná právě tehdy když má n lineárně nezávislých vektorů.

DKZ

$$A = S\Lambda S^{-1} \Rightarrow AS = S\Lambda$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Když i -tý sloupec v S je vlastní vektor k λ_i , tak

$$AS_{*i} = \lambda_i S_{*i}$$

... uděláme pro každý sloupec

$$AS = S\Lambda$$

hotovo

Podobné matice jsou ty samé lineární zobrazení, ale v jiných bázích

$$A = {}_B[f]_B$$

$$A' = {}_{B'}[f]_B \cdot {}_B[f]_B \cdot {}_B[\text{id}]_{B'}$$

$$A' = SAS^{-1}, \text{ kde } S \text{ je } {}_{B'}[f]_B$$

Mocnění diagonalizovatelných matic:

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$A^k = S\Lambda^k S^{-1}$$

Jordanova normální forma

DEF Jordanova buňka

$\lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{C}$. Jordanova buňka $J_k(\lambda)$ je čtvercová matice řádu k definovaná

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Má vlastní číslo λ , které je k -násobné.

λ má pouze jeden vlastní vektor.

DEF Jordanova normální forma

Matice J je v Jordanově normální formě, pokud má na diagonále Jordanovy buňky.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(tam jsou dvě buňky $J_1(5)$, a jedna $J_3(7)$)

VĚTA O Jordanově normální formě

Každá matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je podobná matici v Jordanově normální formě. Tato matice je až na pořadí buňek určena jednoznačně.

bez dk.

Mocnění v2, funguje pro každou matici. Ale mocníme Jordanovu formu:

$$A = SJS^{-1}$$

$$A^k = SJ^kS^{-1}$$

Symetrické matice

Takový, že $A^T = A$.

DEF Hermitovská matice a transpozice

Hermitovská transpozice je $A^* = \overline{A}^T$

Hermitovská matice je taková, že $A^* = A$.

Symetrická je vždycky hermitovská, ale ne naopak.

$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ je sym a herm

$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$ je pouze herm

VĚTA Spektrální rozklad symetrické matice

Pro každou symetrickou matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje ortogonální $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a diagonální $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že

$$A = Q\Lambda Q^T$$

DKZ

Matematickou indukci dle n

$n = 1 : A = (1)A(1)$ ok

$n \leftarrow n - 1$

$Ax = \lambda x$

je to v píči

Nezáporné matice

VĚTA Perronova

1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nezáporná matice. Pak v absolutní hodnotě největší vlastní číslo je reálné nezáporné a příslušný vlastní vektor je nezáporný ve všech složkách.

2. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kladná matice. Pak v absolutní hodnotě největší vlastní číslo je reálné kladné a příslušný vlastní vektor je kladný ve všech složkách. Navíc má násobnost 1.

Výpočet vlastních čísel

VĚTA Gerschgorinovy disky

Každé vlastní číslo λ matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ leží v kruhu o středu a_{ii} a poloměru $\sum_{i \neq j} |a_{ij}|$ (ostatní čísla na řádce i), pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$.

DKZ

doplnit :(

Použití Gerschgorinových disků:

1. Diagonálně dominantní matice
Matice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je regulární, pokud $|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \forall i$. (prostě kruhy neobsahují nulu)
2. Kriterium pro zastavení výpočtu iteračních metod
Když matice konverguje k diagonální, tak se zmenšují disky a zpřesňuje se odhad na vlastní čísla.
3. Markovovy matice
Pro markovovu matici ($A \geq 0, Ae = e$) je vlastní číslo 1 a je největší.
Kruhy se všechny dotýkají jedničky zleva.

Positivně (semi-)definitní matice

DEF Positivně (semi-)definitní matice

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **symetrická**. Pak A je

1. pozitivně semidefinitní, pokud $x^T Ax \geq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^n$.
2. pozitivně definitní, pokud $x^T Ax > 0$ pro všechna $x \neq 0$.

POZN: Positivně (semi-)definitní mají na diagonále nezáporné (kladné) hodnoty: $e_i^T A e_i = a_{ii}$

Funguje i pro nesymetrické matice, když je zesymetrizujeme $A \rightarrow \frac{1}{2}(A + A^T)$

$$x^T \frac{1}{2}(A + A^T)x = \frac{x^T Ax}{2} + \frac{x^T A^T x}{2} = \frac{x^T Ax}{2} + \frac{(x^T A^T x)^T}{2} = x^T Ax$$

TVRZ

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pos. definitní $\Rightarrow A + B$ pos. definitní.

A^{-1} pos. definitní taky.

VĚTA Charakterizace pozitivní definitnosti

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. A je pozitivně definitní,
2. vlastní čísla A jsou kladná,
3. existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hodnosti n taková, že $A = U^T U$.

DKZ

1. $1 \Rightarrow 2$

$$\exists \lambda \leq 0 : Ax = \lambda x$$

$$x^T Ax = \lambda x^T x$$

$$\lambda \leq 0, x^T x \text{ je } > 0.$$

$\Rightarrow A$ není pos. definitní.

2. $2 \Rightarrow 3$

$$A = Q \Lambda Q^T$$

Q ortogonální, Λ diagonální

Λ_2 je odmocněná Λ .

$$A = Q \Lambda Q^T = Q \Lambda_2 \Lambda_2^T Q^T$$

$Q \Lambda_2$ je U , $\Lambda_2^T Q^T$ je U .

3. $3 \Rightarrow 1$

$$x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$$

$$x^T U^T U x = (Ux)^T (Ux) = \|Ux\|^2 > 0$$

VĚTA Charakterizace pozitivní semidefinitnosti

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symetrická. Následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. A je pozitivně semidefinitní,
2. vlastní čísla A jsou nezáporná,
3. existuje matice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ taková, že $A = U^T U$.

Metody na testování pozitivní definitnosti

VĚTA Rekurentní vzoreček na testování pozitivní definitnosti

$\alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^{n-1}, A_z \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ symetrická.

Pak matice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A_z \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní právě tehdy, když platí zároveň

1. $\alpha > 0$,
2. $A_z - \frac{1}{\alpha} a a^T$ je pozitivně definitní.

DKZ

dodělat

Sylvestrovo kritérium pozitivní definitnosti ...

VĚTA Choleského rozklad

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitivně definitní.

Existuje jediná dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s kladnou diagonálou, že

$$A = LL^T$$

DKZ

Indukcí podle n

$$n = 1$$

$$A = (a), a > 0$$

$$L = (\sqrt{a})$$

$$LL^T = A$$

$$n \leftarrow n - 1$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A^\sim \end{pmatrix}$$

$\alpha > 0, A^\sim - \frac{1}{\alpha}aa^T$ je pos. def.

$$\begin{pmatrix} \beta & o^T \\ b & L^\sim \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & b^T \\ o & L^{\sim T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & a^T \\ a & A^\sim \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \beta^2 \Rightarrow \beta = \sqrt{\alpha}$$

$$a = \beta b \Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}a$$

$$A^\sim = bb^T + L^\sim L^{\sim T} \Rightarrow L^\sim L^{\sim T} = A^\sim - bb^T = A^\sim - \frac{1}{\alpha}aa^T$$

VĚTA Skalární součin a pozitivní definitnost

Operace $\langle x, y \rangle$ je skalární součin v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když má tvar

$$\langle x, y \rangle = x^T Ay$$

pro nějakou **pozitivně definitní** matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

DKZ

implikace tam

$$\langle x, y \rangle = x^T R^T R y, R \text{ je reg.}, A = R^T R$$

implikace zpátky

$$\langle x, y \rangle = x^T Ay$$

$$\langle x, y \rangle = x^T Ay \stackrel{\text{je to číslo}}{=} (x^T Ay)^T = y^T A^T x = \langle y, x \rangle$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0, (= 0 \text{ jen pro } x = 0)$$

$$Z \text{ pos. def. } x^T Ax > 0, \forall x \neq 0$$

Kvadratické formy

DEF Bilineární a kvadratická forma

V vek. prostor nad $\mathbb{T}$.

1. **Bilineární forma** je zobrazení $b : V^2 \rightarrow \mathbb{T}$, které je lin. v první i druhé složce zvlášť

$$b(\alpha u + \beta v, w) = \alpha b(u, w) + \beta b(v, w)$$

$$b(u, \alpha v + \beta w) = \alpha b(u, v) + \beta b(u, w)$$

2. Bilineární forma je symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u) \quad \forall u, v \in V$

3. Zobrazení $f : V \rightarrow \mathbb{T}$ je **kvadratická forma**, pokud

$$f(u) = b(u, u)$$

pro nějakou **symetrickou** bilineární formu b .

DEF Matice bilineární formy a kvadratické formy

$b : V^2 \rightarrow \mathbb{T}$ bilin. forma a $B = \{w_1, \dots, w_n\}$ báze V .

Matice bilineární formy b vzhledem k bázi B je $A \in \mathbb{T}^{m \times n}$, kde

$$a_{ij} = b(w_i, w_j)$$

Protože:

$$b(u, v) = b\left(\sum_i x_i w_i, \sum_j y_j w_j\right) \stackrel{\text{bilin.}}{=} \sum_i b\left(w_i, \sum_j y_j w_j\right) \stackrel{\text{bilin.}}{=} \sum_i \sum_j x_i y_j b(w_i, w_j) = x^T A y = [u]_B^T A [v]_B$$

U kvadratické formy musí být matice symetrická.

VĚTA Maticové vyjádření forem

B báze V , b bilin. forma V .

Pak A je matice formy b vzhledem k bázi B právě tehdy když

$$b(u, v) = [u]_B^T A [v]_B, \forall u, v \in V$$

DKZ

$$u = w_i \text{ (vektor z báze) } v = w_j$$

$$b(w_i, w_j) = e_i^T A e_j = a_{ij}$$

Každé matici odpovídá bilineární forma, kde $b(w_i, w_j) = a_{ij}, \forall i, j = 1, \dots, n$

TODO: sus

VĚTA Sylvestruv zákon setrvačnosti

$f(x) = x^T A x$ kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$.

Existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky 1, -1, 0.

Navíc tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná vůči všem bázím.

TODO: důkaz

DEF Polární báze

Báze vůči níž matice kvadratické formy je diagonální.

Význam: z diagonalizace můžeme rozhodnout o definitnosti té matice. Obecně známe, kolik vlastních čísel je kladných, záporných, nulových.

Diagonalizace symetrických matic: dělám elementární úpravy. Ty mi mění vlastní čísla, ale ne jejich znaménka.

Abych dostal i polární bázi, tak počítám $(S^T A S \mid I S)$ vlevo diagonalizuji (a dělám tytéž úpravy na řádky i sloupce) a napravo si jen zaznamenávám úpravy, které jsem dělal (už třeba jen ve sloupcích). V S je ve sloupcích polární báze.

VĚTA SVD rozklad

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}, q := \min\{m, n\}$$

Existuje diagonální matice $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ s prvky $\sigma_{11} \geq \dots \geq \sigma_{qq} \geq 0$ a ortogonální matice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takové, že

$$A = U\Sigma V^T$$

DEF Redukovaný SVD rozklad

$$A = U\Sigma V^T = (U_1 \mid U_2) \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S V_1^T$$

1. $U_1 U_1^T$ je matice projekce do $S(A)$
2. $V_1 V_1^T$ je matice projekce do $R(A)$

DEF Číslo podmíněnosti

U SVD rozkladu hodnota $\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \geq 1$

Ortogonální matice mají číslo podmíněnosti 1. Říká to jak moc to lin. zobrazení deformuje prostor.